



### EXERCICE 1: Tension rectangulaire

$u(t)$  est une tension de période  $T$  et de rapport cyclique  $\alpha$ .

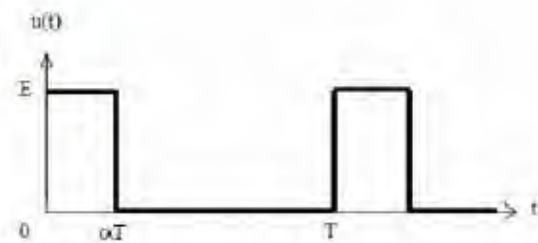
1. Calculer la valeur moyenne  $\langle u \rangle$  et la valeur efficace  $U_{eff}$  de la tension  $u$ .

Avec les valeurs numériques ci-dessous.

2. Calculer la valeur efficace  $U_{ACeff}$  de la composante alternative.

3. Vérifier que  $U_{eff}^2 = \langle u^2 \rangle + U_{ACeff}^2$

A.N.  $E = 5V$  ;  $\alpha = 0,5$ .

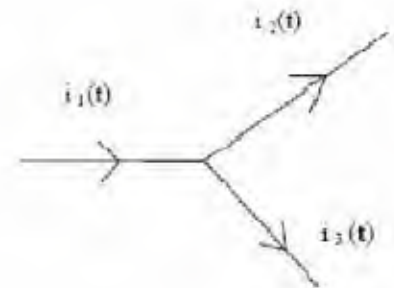


### EXERCICE 2: Régime sinusoïdal

$$i_1(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) ; i_2(t) = 2\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{5\pi}{6})$$

1. Déterminer  $i_3(t)$  par la méthode des vecteurs de Fresnel et par la méthode des nombres complexes.

2. Calculer  $\varphi_{u/i_2}$ ,  $\varphi_{i_2/i_3}$  et  $\varphi_{i_1/i_3}$ .



### EXERCICE 3: Régime sinusoïdal

Représentation de Fresnel :

1. Construire  $\vec{U}_R$ ,  $\vec{U}_C$  et  $\vec{U}$

2. En déduire l'expression de  $Z_{eq}$  ainsi que l'expression du déphasage  $\varphi$  de  $u$  par rapport à  $i$ .

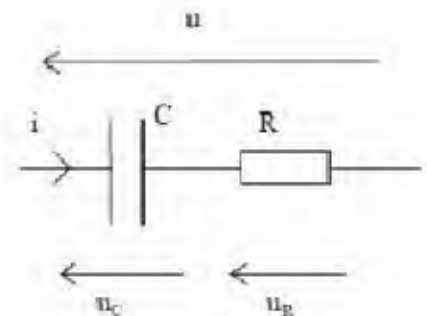
3. Applications numériques

On donne  $U = 5V$ ,  $f = 10kHz$ ,  $R = 1k\Omega$  et  $C = 10nF$ .

Calculer  $I$ ,  $\varphi$ ,  $U_R$  et  $U_C$ .

Comparer  $U$  et  $U_R + U_C$ . Commentaires ?

4. Pour quelle fréquence a-t-on  $U_C = U_R$  ?



### EXERCICE 4: Régime sinusoïdal

Une bobine réelle est équivalente à une résistance  $R$  en série avec une inductance  $L$ .

On la branche en série avec une résistance  $r = 8\Omega$

On donne  $f = 50Hz$ ,  $U = 14V$ ,  $U_B = 8V$  et  $U_r = 8V$ .

1. Calculer  $I$ .

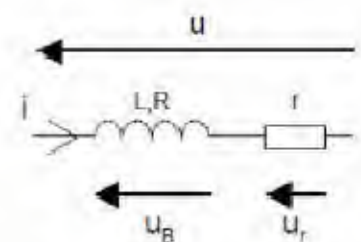
2. Construction de Fresnel :

- a. Construire  $\vec{U}_r$ ,  $\vec{U}_B$  et  $\vec{U}$

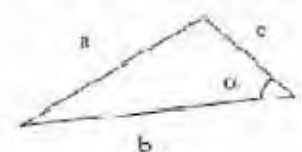
- b. Calculer  $\varphi_{u/i}$  et  $\varphi_{u_B/i}$

- c. A partir de  $\vec{U}_B$  construire  $\vec{U}_R$  et  $\vec{U}_L$

- d. En déduire  $R$  et  $L$ .



**Rappel :** dans un triangle quelconque :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



### EXERCICE 5: Régime sinusoïdal

Déterminer  $Y_{eq}$ .

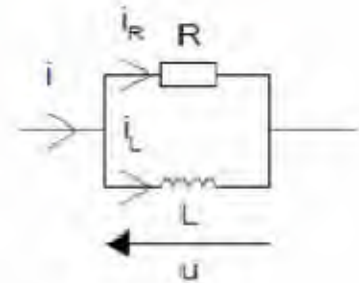
En déduire  $Y_{eq}$  et  $\varphi_{u/i}$ .

Applications numériques

On donne  $U = 2\text{ V}$ ,  $f = 15\text{ kHz}$ ,  $R = 4,7\text{ k}\Omega$  et  $L = 65\text{ mH}$ .

Calculer  $I_R$ ,  $I_L$ ,  $I$ ,  $\varphi_{u/i}$ ,  $\varphi_{I_L/I}$  et  $\varphi_{I/I_R}$ .

Pour quelle fréquence a-t-on  $\varphi_{u/i} = 45^\circ$  ?



### EXERCICE 6: Régime sinusoïdal

Déterminer  $Z_{eq}$ .

En déduire  $Z_{eq}$  et  $\varphi_{u/i}$ .

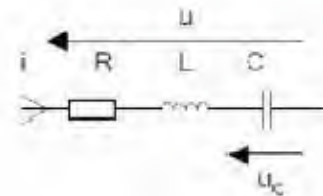
Quand  $u$  et  $i$  sont en phase on dit qu'il y a *résonance*.

Que vaut alors  $Z_{eq}$  ?

A quelle pulsation  $\omega_0$  a lieu la résonance ?

$Q = \frac{U_C}{U}$  est appelé coefficient de surtension.

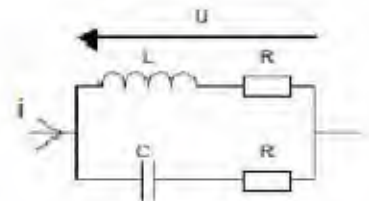
Montrer qu'à la résonance  $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$



### EXERCICE 7: Régime sinusoïdal

Déterminer  $Z_{eq}$ .

Si  $LC\omega^2 = 1$  que vaut le déphasage entre  $u$  et  $i$  ?

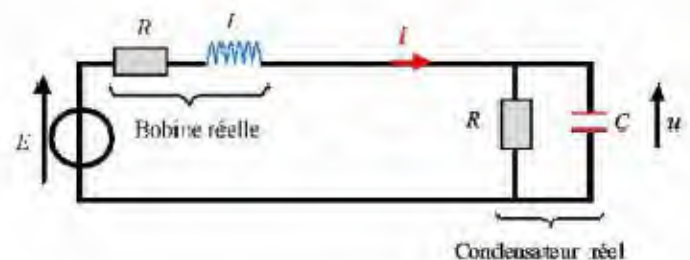


### EXERCICE 8: Bobine réelle en série avec un condensateur réel

Le montage ci-dessous modélise une bobine réelle ( $L$ ,  $R$ ) en série avec un condensateur réel ( $C$ ,  $R$ ) initialement déchargé. On a la propriété :

$$\tau = \frac{L}{R} = RC.$$

- Déterminer l'évolution de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à  $t=0$ , sur un générateur de tension  $E$ .
- Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer  $U$ , tension aux bornes du condensateur, et  $I$ , courant dans la bobine, en régime permanent.





## TD: REPONSES

Bonne chance

## EXERCICE 1:

- 1- Calculer la valeur moyenne  $\langle u \rangle$  et  $U_{eff}$  de la tension  $u$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{\alpha T} E dt + \int_{\alpha T}^T 0 dt \right) = \frac{1}{T} (Et) \Big|_0^{\alpha T}$$

$$= \alpha E = 2.5 V \quad \boxed{\langle u \rangle = 2.5 V}$$

d'après le cours on a:  $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$

donc  $\langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} u^2(t) dt = \frac{1}{T} E^2 \alpha T = \alpha E^2$

$$\Rightarrow U_{eff} = \sqrt{\alpha} \cdot E = 3.536 V = 3.536 V \quad \boxed{U_{eff} = 3.536 V}$$

- 2- La valeur efficace de la composante alternative est:

on a:  $u(t) = \langle u \rangle + u_{AC}(t) \Rightarrow u_{AC}(t) = u(t) - \langle u \rangle$

Pour  $0 < t < \alpha T$   $u(t) = 5V \Rightarrow u_{AC}(t) = 2.5V$

Pour  $\alpha T < t < T$   $u(t) = 0V \Rightarrow u_{AC}(t) = -2.5V$

$$\text{Or } U_{AC,eff}^2 = \langle u_{AC}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} u_{AC}^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T u_{AC}^2(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T u_{AC}^2(t) dt \text{ puisque } \leftarrow$$

$$= (2.5)^2 \Rightarrow \boxed{U_{AC,eff} = 2.5 V}$$

Il est clair que  $U_{eff}^2 = \langle u \rangle^2 + U_{AC,eff}^2$

## EXERCICE 2:

- Méthode des nombres complexes:

on a:  $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ ,  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$$\Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 \quad \text{or } \underline{I}_1 = (I_{1,eff}, \varphi_1) = (4, -\frac{\pi}{3})$$

$$\text{et } \underline{I}_2 = (I_{2,eff}, \varphi_2) = (2, -\frac{5\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \underline{I}_3 = (4, -\frac{\pi}{3}) - (2, -\frac{5\pi}{6}) = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} - 2e^{-j\frac{5\pi}{6}}$$

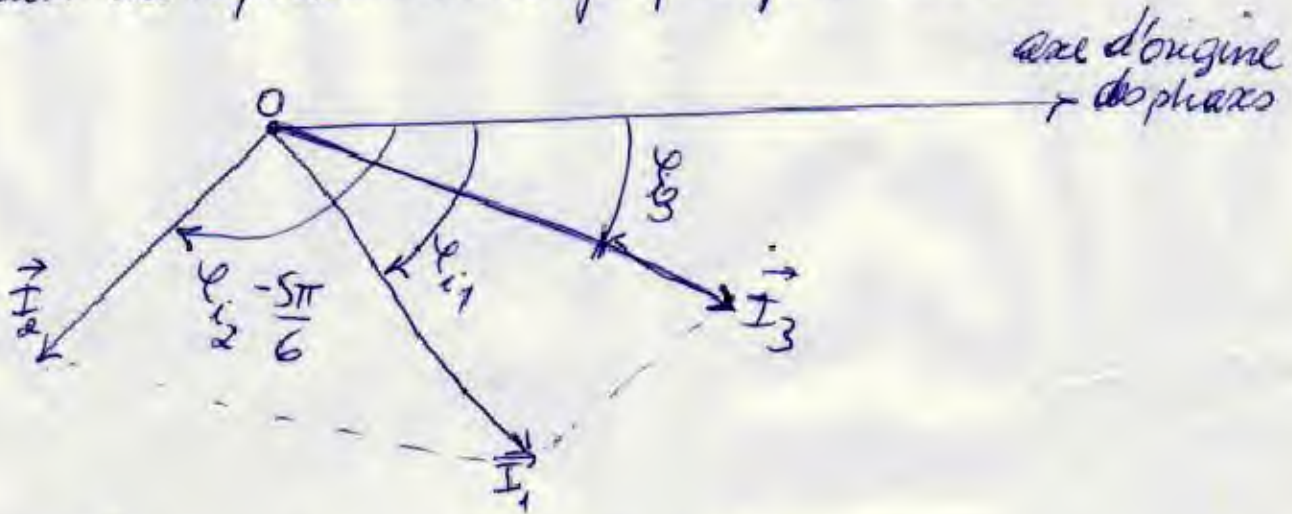


## EXERCICE 2: (SUITE)

$$\begin{aligned} \vec{I}_3 &= 4\vec{e}^{-j\pi/3} - 2\vec{e}^{-j5\pi/6} = (2 - 2\sqrt{3}j) - (-\sqrt{3} - j) \\ &= 2 + \sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})j = (4.472, -0.584) \\ i_3(t) &= 4.472\sqrt{2} \sin(\omega t - 0.584) \end{aligned}$$

$i_3(t)$  par la méthode de Fresnel est:

selon la représentation graphique on a:



d'après le graphique on a:  $I_3 \approx 4.5A$

$\varphi_{i3} = -33^\circ \approx -0.58 \text{ rad}$ , d'où  $i_3(t) = \dots$

$$i_3(t) \approx +4.5\sqrt{2} \sin(\omega t - 0.58)$$

2-  $\varphi_{i1/i2} = -\frac{\pi}{3} - (-5\pi/6) = \pi/2$ :  $i_1$  est en quadrature avec  $i_2$

$$\varphi_{i2/i3} = -5\pi/6 - (-0.584) = -2.034 \text{ rad} = -116^\circ$$

$$\varphi_{i1/i3} = -\pi/3 - (-0.584) = -0.463 \text{ rad} = -26^\circ$$

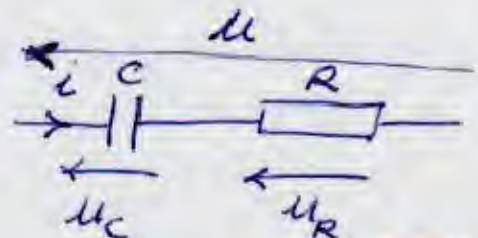
$$26^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 0.463 \text{ rad}$$

$$0.463 \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 26^\circ$$

## EXERCICE 3:

Représentation de Fresnel:

Construction de  $\vec{u}_R$ ,  $\vec{u}_C$  et  $\vec{u}$

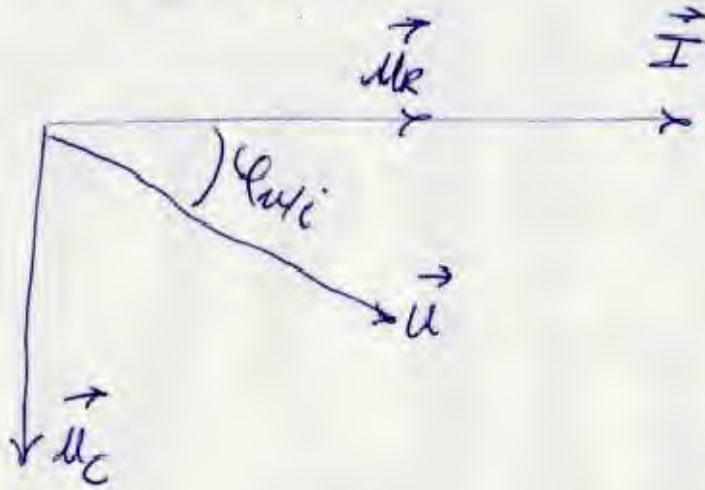




## Exercice 3 (suite)

\* 3 \*

1- On a :  $\vec{u} = \vec{u}_R + \vec{u}_C$



Par définition  $u = Z_{eq} I$  ,  $u_R = RI$  ,  $I = j\omega C u_C$

$$\Rightarrow Z_R = R \text{ et } Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

$$Z_R = (R, 0^\circ) , Z_C = \left(\frac{1}{\omega C}, -\pi/2\right)$$

2-  $u_R = RI$  et  $u_C = \frac{1}{\omega C} I$  D'où :  $Z_{eq}^2 = \frac{u^2}{I^2}$

$$Z_{eq}^2 = \frac{u^2}{I^2} = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ Finalement :}$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \text{ soit : } \varphi = -\arctg\left(\frac{1}{R\omega C}\right)$$

3- loi d'Ohm :  $I = \frac{u}{Z_{eq}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 2.66 \text{ mA}$

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{1}{R\omega C}\right)$$

$$u_R = RI = 2.66 \text{ V}$$

$$u_C = \frac{I}{\omega C} = 4.23 \text{ V}$$

On remarque que  $u \neq u_R + u_C$

les valeurs efficaces ne s'additionnent pas  
(sauf cas particulier)



## Exercice 3 (suite)

\* 4 \*

$$U_R = U_C \Rightarrow RI = \frac{I}{C\omega} \text{ soit : } RC\omega = 1$$

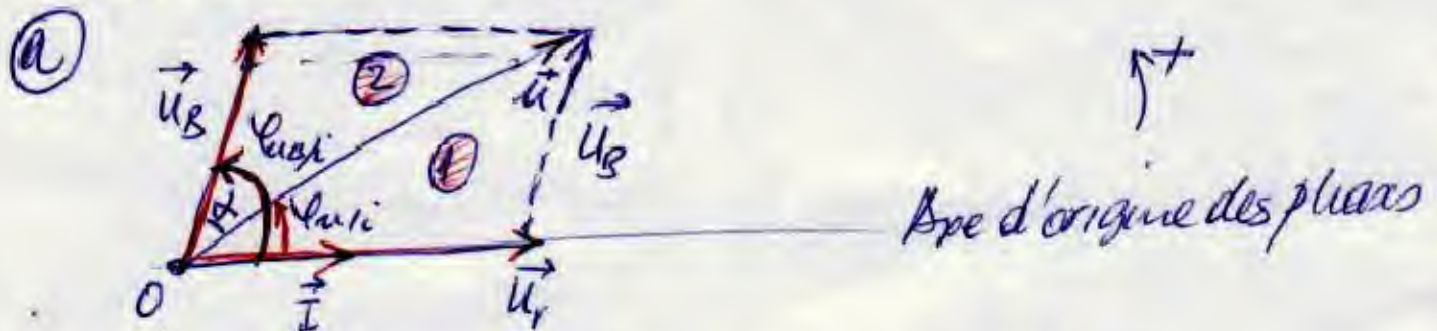
$$f = \frac{1}{2\pi RC} = 15.9 \text{ KHz.}$$

## EXERCICE 4:

1- Pour calculer le courant  $I$ , on applique tout simplement la loi d'Ohm :  $U_r = RI$

$$\text{A.N. } I = 1 \text{ A}$$

2- Construction de Fresnel.



Dans le triangle délimité par les trois vecteurs :

(1)  $U_B^2 = U_r^2 + U_C^2 - 2U_r U_C \cos \varphi_{u/i}$

(b)  $\cos \varphi_{u/i} = \frac{U^2 + U_r^2 - U_B^2}{2U U_r} = 0.875$ ,  $\left( \varphi_{u/i} = \arccos 0.875 \right)^{\text{rad}}$

$$\varphi_{u/i} \approx 29^\circ$$

Pour calculer  $\varphi_{u_B/i}$ , on suit les mêmes démarches,

(2)  $U_r^2 = U_B^2 + U_C^2 - 2U_B U_C \cos \alpha$  tel que  $\alpha + \varphi_{u/i} = \varphi_{u_B/i}$

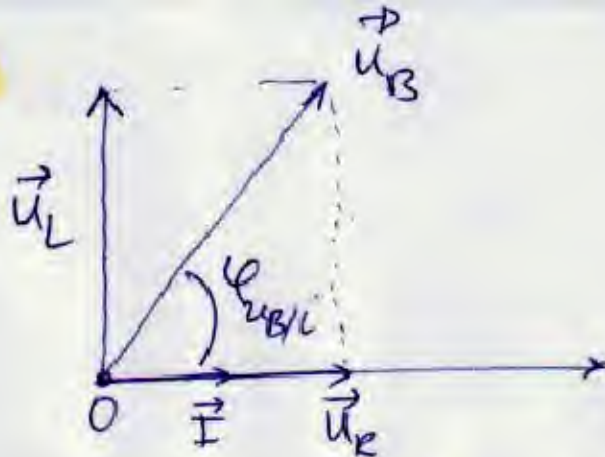
$$\alpha \approx 29^\circ \Rightarrow \varphi_{u_B/i} = 58^\circ$$



## Exercice 4 (suite)

\* (5) \*

③  $\vec{U}_B = \vec{U}_R + \vec{U}_L$



$$\cos \varphi_{u_B/i} = \frac{U_R}{U_B} \Rightarrow U_R = U_B \cos \varphi_{u_B/i} = 4.25 \text{ V}$$

$$\Rightarrow R = \frac{U_R}{I} = 4.25 \Omega$$

$$U_L = U_B \sin \varphi_{u_B/i} = 6.78 \text{ V}$$

$$L = \frac{U_L}{\omega I} = 21.6 \text{ mH}$$

## Exercice 5:

$$Y_{eq} = Y_R + Y_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} \quad Y_{eq} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\varphi_{u/i} = -\arg Y = -\arctg \frac{-\frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}} = \arctg \left( \frac{R}{L\omega} \right)$$

Applications numériques:

$$I_R = U/R = 0.43 \text{ mA}, \quad I_L = \frac{U}{L\omega} = 0.33 \text{ mA}$$

$$I = Y_{eq} U = 0.54 \text{ mA}$$

$$\varphi_{u/i} = +37^\circ$$

$$\varphi_{i_L/i} = \varphi_{i_L/u} + \varphi_{u/i} = -90^\circ + 37^\circ = -53^\circ$$

$$\varphi_{i_R/i} = \varphi_{i_R/u} = -37^\circ, \quad \text{tg } \varphi_{u/i} = \frac{R}{L\omega}$$

$$\text{si } \varphi_{u/i} = 45^\circ \text{ alors } \frac{R}{L\omega} = 1$$

$$\text{soit } f = \frac{R}{2\pi L} = 11.5 \text{ KHz.}$$



## Exercice 5:

+ 0 +

- Calcul de l'admittance équivalente:

$$\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_R + \bar{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$$

Le module de  $\bar{Y}_{eq}$  est:  $Y_{eq} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(L\omega)^2}}$

$$\varphi_{u/i} = ? \text{ on a: } \varphi_{u/i} = \arctg \frac{\text{Im}(\bar{Z}_{eq})}{\text{Re}(\bar{Z}_{eq})} ; \arg \bar{Z}_{eq} = \varphi_{u/i}$$

$$\arg(\bar{Z}_{eq}) = \arg\left(\frac{1}{\bar{Y}_{eq}}\right) = \varphi_{u/i} = -\arg(\bar{Y}_{eq}) \text{ d'où } \arg \bar{Y}_{eq} = -\varphi_{u/i}$$

$$\varphi_{u/i} = -\arg \bar{Y}_{eq} = -\arctg \frac{\text{Im}(\bar{Y}_{eq})}{\text{Re}(\bar{Y}_{eq})} = \arctg \frac{R}{L\omega}$$



$$z = a + jb \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

Applications numériques:

$$* I_R = \frac{U}{R} = 0.43 \text{ mA} ; I_L = \frac{U}{L\omega} = 0.33 \text{ mA}$$

$$* U = \frac{1}{Y_{eq}} I \Rightarrow I = Y_{eq} U = 0.54 \text{ mA}$$

$$* \varphi_{u/i} = \arctg \frac{R}{L\omega} = 37^\circ \quad (\omega = 2\pi f)$$

$$* \varphi_{i_L/i} = \varphi_{i_L/u} + \varphi_{u/i} = -90^\circ + 37^\circ = -53^\circ$$

$$U = jL\omega I_L \Rightarrow I_L = \frac{-j}{L\omega} U = \frac{1}{L\omega} e^{-\pi/2} U$$

$$* \varphi_{i_R/i} = \varphi_{i_R/u} + \varphi_{u/i} = -\varphi_{u/i} = -37^\circ$$

\* cherchons la fréquence  $f$  tel que  $\varphi_{u/i} = 45^\circ$

$$\tan \varphi_{u/i} = \frac{R}{L\omega} = \frac{R}{L 2\pi f} ; \text{ si } \varphi_{u/i} = 45^\circ \text{ alors } \frac{R}{L\omega} = 1$$

$$\text{Soit: } f = \frac{R}{2\pi L} = 11.5 \text{ kHz}$$



## Exercice 6:

\* 7 \*

$$\bar{Z}_{eq} ? \quad \bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Déduisons  $Z_{eq}$  et  $\varphi_{ui}$

tout simplement:  $Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$$\tan \varphi_{ui} = \frac{\text{Im}(\bar{Z}_{eq})}{\text{Re}(\bar{Z}_{eq})} = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \quad \boxed{\arg(\bar{Z}_{eq}) = \varphi_{ui}}$$

$$\Rightarrow \varphi_{ui} = \arctan \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$$

\* lorsqu'il y a résonance,  $u$  et  $i$  sont en phase ( $\varphi_{ui} = 0$ )

$$\varphi_{ui} = 0 = \arctan \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

or  $\bar{Z}_{eq} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R$  ;  $\boxed{|\bar{Z}_{eq}| = R}$

\* s'il y a résonance  $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

\* Coefficient de surtension à la résonance  $Q = \frac{U_C}{U}$

$$U = Z_{eq} I \text{ et } U_C = \frac{I}{C\omega} \text{ alors } \frac{U_C}{U} = \frac{1}{C\omega R} \quad \left( \begin{array}{c} Z_{eq} = R \\ \uparrow \\ \text{résonance} \end{array} \right)$$

$$Q = \frac{1}{R C \omega_0}$$

A.N.  $\omega_0 = 10^5 \text{ rad/s}$  ;  $Q_0 = 22.7$  ;  $U_{C0} = 114 \text{ V}$



$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{eq} &= (\bar{Z}_L + \bar{Z}_R) // (\bar{Z}_C + \bar{Z}_R) \\
 &= (jL\omega + R) // \left( \frac{1}{j\omega C} + R \right) = \frac{(jL\omega + R) \left( \frac{1}{j\omega C} + R \right)}{2R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}} \\
 &= \frac{R^2 + jR(L\omega - \frac{1}{\omega C}) + \frac{L}{C}}{2R + j(L\omega - \frac{1}{\omega C})}
 \end{aligned}$$

si  $L\omega^2 C = 1$   $\varphi_{u/i} = ?$

$\bar{Z}_{eq} = \frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R}$  est purement réelle pas de partie imaginaire

$\tan \varphi_{u/i} = \frac{\text{Im}(\bar{Z}_{eq})}{\text{Re}(\bar{Z}_{eq})} = 0 \Rightarrow \varphi_{u/i} = 0^\circ$

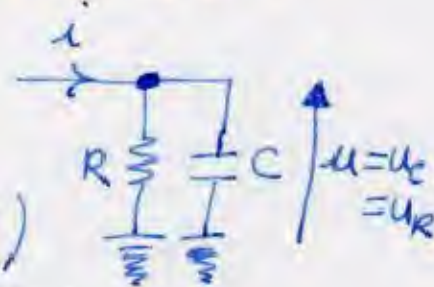
donc  $u$  et  $i$  sont en phase.

### Exercice 8 :

\* Evolution de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur :

La loi des nœuds donne :

■  $i = i_R + i_C = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \quad (1)$



la loi des mailles donne :

■  $E = Ri + L \frac{di}{dt} + u \quad (2)$

En reportant (1) dans (2)



$$E = (RC \frac{du}{dt} + u) + \frac{L}{R} (RC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt}) + u$$

$$= \tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\tau \frac{du}{dt} + 2u$$

soit:  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2} u = \frac{E}{\tau^2}$

la solution particulière constante est

$$u_2(t) = \frac{E}{2}$$

L'équation sans second membre s'écrit

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2} u = 0$$

polynôme caractéristique:  $r^2 + \frac{2}{\tau} r + \frac{2}{\tau^2} = 0$

$$\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$$

le polynôme admet deux racines complexes

conjuguées:  $r = -\frac{1}{\tau} \pm j \frac{1}{\tau}$



En régime pseudo-périodique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme:

$$u(t) = \frac{E}{2} + e^{-\frac{t}{\tau}} \left( A \cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

On applique les conditions initiales pour déterminer A et B

$$u(0) = 0 = A + \frac{E}{2} = 0 \quad \text{d'où: } A = -\frac{E}{2}$$

$$\frac{du(0)}{dt} = \frac{1}{C} \left( i(0) - \frac{u(0)}{R} \right) = 0 \Rightarrow \frac{B}{\tau} - \frac{A}{\tau} = 0 \quad \text{d'où } B = A = -\frac{E}{2}$$



la loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right) \right)$$

2- En régime permanent, la tension  $u$  aux bornes du condensateur et l'intensité  $i$  dans la bobine sont constantes.

$$u = U \quad \text{et} \quad i = I$$

le condensateur se comporte alors comme un interrupteur et la bobine comme un fil.

Le montage est équivalent au schéma simple

ci-dessous



la loi des mailles donne immédiatement

$$I = \frac{E}{2R} \quad \text{d'où} : \quad U = \frac{E}{2}$$





ETUSUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Diapo  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
MTU  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..